Πανεπιστημιο Ιωαννινων
Σχολη θετικων επιστημων
Τμημα Μαθηματικων
Τομεας αλγεβρας και γεωμετριας

αναλυτικη γεωμετρια
(εξετασεις περιοδου ιουνιου)
διδασκων: Χρηστος Κ. Τατακης
δευτερα 27 ιουνιου 2016

ΘΕΜΑ 1.

(1) Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma} \in \mathbb{R}^3$. Να αποδείξετε ότι το $|\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}|$ εκφράζει το εμβαδό του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ είναι ίσος με $|\left(\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}\right)|$. Κάνοντας εφαρμογή των παραπάνω, να υπολογίσετε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = (0,2,3)$, $\overrightarrow{\beta} = (0,2,1)$, $\overrightarrow{\gamma} = (1,-1,2)$.

(0.7 μονάδες)

(2) Θεωρούμε μοναδιαία διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, για τα οποία γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}$ είναι κάθετο με τα διανύσματα $\overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$. Να υπολογιστεί η παράσταση:

$$\left(\left(\left(\left(\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}\right) \times \overrightarrow{\beta}\right) \times \overrightarrow{\beta}\right) \times \overrightarrow{\beta}\right) \cdot \overrightarrow{\gamma}$$

(0.5 μονάδες)

(3) Έστω τυχόν τρίγωνο $AB\Gamma$ και θεωρούμε τις διαμέσους AM_1 και BM_2 αυτού. Αν M το σημείο τομής των διαμέσων AM_1 και BM_2, να αποδείξετε διανυσματικά ότι:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_1} \text{ και } \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM_2}.$$

(0.8 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2.

Δίνονται τα σημεία $A(1,-1,2), B(2,2,2), \Gamma(0,1,-3), \Delta(1,1,\lambda) \in \mathbb{R}^3$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) Να προσδιοριστεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε τα σημεία A, B, Γ, Δ να είναι συνεπίπεδα. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε ένα κάθετο και ένα παράλληλο διάνυσμα στο επίπεδο που ορίζουν τα σημεία A, B, Γ, Δ.

(0.8 μονάδες)

(2) Να προσδιοριστούν οι εξισώσεις της διχοτόμου της γωνίας $\Gamma\widehat{\Delta}A$.

(0.7 μονάδες)

(3) Έστω Π το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\varphi(\Pi)$ το τετράπλευρο $A'B'\Gamma'\Delta'$ όπου A', B', Γ', Δ', οι εικόνες των A, B, Γ, Δ, μέσω ενός ορθογώνιου γεωμετρικού μετασχηματισμού φ. Να υπολογιστεί το εμβαδό του τετραπλεύρου $\varphi(\Pi)$.

(1 μονάδα)

ΘΕΜΑ 3.

(1) Στο επίπεδο Oxy θεωρούμε την έλλειψη με κέντρο το $(0,0)$, της οποίας η απόσταση των εστιών της είναι ίση με 4. Θεωρούμε την ευθεία $2x + 3y + 9 = 0$, η οποία εφάπτεται της έλλειψης σε σημείο $M(x_1, y_1)$ αυτής. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της έλλειψης και να σχεδιάσετε το γράφημά της.

(1 μονάδα)

(2) Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε τυχόν σημείο αυτής, διχοτομεί τη γωνία των εστιακών ακτινών.

(1 μονάδα)

ΘΕΜΑ 4.
Θεωρούμε τις παρακάτω σφαίρες:

$$\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 10 = 0$$

και

$$\Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 7y + 6z - 10 = 0.$$

(1) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω σφαίρες τέμνονται.

(0.5 μονάδες)

(2) Να προσδιορίσετε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων τομής των σφαιρών Σ_1 και Σ_2.

(1 μονάδα)

ΘΕΜΑ 5.

(1) Να αναγνωρίσετε το είδος της επιφάνειας του $\mathbb{R}^3$ σε κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις:

$\alpha)$ $x^2 - \dfrac{y^2}{2} = 2z$. Επιπλέον, να προσδιορίσετε το είδος της παραπάνω επιφάνειας όταν $z = 0$.
$\beta)$ $-x^2 - y^2 + 2y = 0$.
$\gamma)$ $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x - 8y = 8$.
$\delta)$ $-x^2 - 3z^2 + 2x + y + 18z = 25$.

Σε κάθε μία των περιπτώσεων β, γ, δ, να σχεδιάσετε προσεγγιστικά τα γραφήματα των επιφανειών.

(1 μονάδα)

(2) Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται από τη σχέση

$$q(x, y, z) = 4x^2 - 2xz + 3y^2 + 4z^2, \ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

στους κύριους άξονες, τους οποίους και να προσδιορίσετε.
Στη συνέχεια, να προσδιορίσετε το είδος της επιφάνειας που δίνεται από τη σχέση:

$$4x^2 - 2xz + 3y^2 + 4z^2 - 2\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}z - 7 = 0.$$

Προσδιορίζοντας τις συντεταγμένες του κέντρου της παραπάνω επιφάνειας στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων $Oxyz$, να τη σχεδιάσετε προσεγγιστικά.

(1.5 μονάδες)

Καλή επιτυχία!!!
